d Fehlerrechnung

Aufgabe einer physikalischen Messung ist es, den Zahlenwert einer physikalischen Größe festzustellen. Weil aber einerseits die Schärfe der menschlichen Sinneswahrnehmungen begrenzt ist, andererseits jede Messung zahlreichen, nicht immer kontrollierbaren Einflüssen der Umgebung ausgesetzt ist, weicht jedes Messergebnis x von dem fehlerfreien — grundsätzlich unbekannten — Ergebnis, dem **wahren Wert** X^* dieser Größe, ab. Diese Abweichung

$$\Delta X^* = x - X^*$$

wird als **wahrer Fehler** einer Messung bezeichnet. Es ist die **Aufgabe der Fehlerrechnung**, aus einer Reihe von Messwerten den zuverlässigsten Wert zu bestimmen und Fehlergrenzen anzugeben, innerhalb derer der wahre Wert am wahrscheinlichsten liegt. Jede Auswertung einer physikalischen Messung, die nicht zugleich mit dem Ergebnis auch eine Angabe seiner Genauigkeit enthält, ist wertlos. Man unterscheidet grundsätzlich zwei Arten von Fehlern, systematische und zufällige:

Systematische Fehler

Systematische Fehler haben ihre Ursachen im Mess-System. Sie sind reproduzierbar und treten bei Wiederholung in gleicher Richtung und Größe auf. Beispiele dafür sind falsch geeichte Skalen, verschobene Null-Stellungen an Messinstrumenten oder Längenänderungen von Skalen durch die Temperatur der Umgebung. Diese Art der Fehler kann durch Kontrolle und Verbesserung der Apparatur beseitigt bzw. verkleinert werden.

Zufällige Fehler

Zufällige Fehler lassen sich im Gegensatz dazu grundsätzlich nicht vermeiden. Innerhalb einer Messreihe unterscheiden sie sich nach Größe und Betrag. Sie können durch Wiederholung der Messung auf ein vernünftiges Maß gebracht und, was hier besonders wichtig ist, mathematisch oder durch Abschätzen bestimmt werden.

Mittelwert $\bar{x}$

Aus einer Reihe von n verschiedenen Messungen einer Messreihe wird der Bestwert als der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ berechnet.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(d- 1)}$$

Mittlerer Fehler des Einzelwertes s (Standardabweichung)

Der mittlere Fehler der Einzelmessung, auch Standardabweichung, ist ein Maß für die Abweichung des Einzelmesswertes x_i vom Mittelwert $\bar{x}$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{d- 2}$$

In Worten: Bei einer Messreihe mit genügend vielen ($n \geq 10$) Einzelmessungen bestimme man die Differenz der Einzelmessungen x_i zum Mittelwert $\bar{x}$, quadriere sie, bilde dann die Summe über die Quadrate, teile durch $(n-1)$ und ziehe die Wurzel aus dem Ergebnis. Der Nenner $(n-1)$ anstelle von n zeigt an, dass erst die zweite Messung als Vergleichsmessung anzusehen ist.

Mittlerer Fehler des Mittelwertes $\Delta\bar{x}$ (Standardabweichung des Mittelwertes)

Der mittlere Fehler des Mittelwertes $\Delta\bar{x}$ ist um den Faktor $1/\sqrt{n}$ kleiner als die Standardabweichung s.

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{d- 3}$$

oder

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{d- 4}$$

$\Delta\bar{x}$ ist wichtig bei der Angabe des Fehlers einer Messreihe. Über Normal- oder Gauß-Verteilung und statistische Sicherheit lese man in der angegebenen Literatur nach.

Beispiel Eine Länge l werde 10 mal gemessen:

i	l_i [mm]	$(l_i - \bar{l})$ [10^{-1} mm]	$(l_i - \bar{l})^2$ [10^{-1} mm^2]
1	7,5	−4,8	2,304
2	8,2	2,2	0,484
3	7,5	−4,8	2,304
4	8,6	6,2	3,844
5	8,6	6,2	3,844
6	8,7	7,2	5,184
7	7,4	−5,8	3,364
8	8,2	2,2	0,484
9	7,3	−6,8	4,624
10	7,8	−1,8	0,324
Σ	79,8	0	26,760

Mittelwert:

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i \qquad ; \qquad \bar{l} = \frac{79,8\,\mathrm{mm}}{10} = 7,98\,\mathrm{mm}$$

Mittlerer Fehler der Einzelmessung:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2}{n-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{2,676\,\mathrm{mm}^2}{9}} = 0,55\,\mathrm{mm} \approx 0,6\,\mathrm{mm}$$

Mittlerer Fehler des Mittelwertes:

$$\Delta\bar{l} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,6\,\mathrm{mm}}{\sqrt{10}} \approx 0,2\,\mathrm{mm}$$

$$\underline{\text{Ergebnis :}\quad \bar{l} = (8,0 \pm 0,2)\,\mathrm{mm}}$$

Hinweis

Der Fehler sollte mit **einer** oder **zwei gültigen Ziffern** angegeben werden, wobei grundsätzlich **aufgerundet** wird. Der Mittelwert wird bis zur **gleichen Nachkommastelle** wie der Fehler angegeben.

Fehlerfortpflanzung
(Fehler eines zusammengesetzten Ergebnisses)

Eine physikalische Messung liefert nicht immer direkt das Endergebnis, z.B. kann man zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c die Wellenlänge λ und die Frequenz ν messen und c aus dem Produkt von λ und ν berechnen.
Wie genau ist c?
Man kennt die Fehler $\Delta\lambda$ und $\Delta\nu$ sowie den Zusammenhang $c = c(\lambda, \nu)$ und kann nach dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz** Δc berechnen.

Allgemein gilt bei gegebener Funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ für den **absoluten Grösstfehler** des Ergebnisses Δy

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \tag{d- 5}$$

In Worten: Zunächst leitet man $f(x_1, \ldots, x_n)$ nach jedem der x_i ab, die Ableitung nach x_i multipliziert man mit dem Fehler Δx_i und addiert die Beträge der Produkte über alle i.

Für das Beispiel $c = \nu \cdot \lambda$ wird der absolute Fehler

$$\Delta c = \left| \frac{\partial(\nu \cdot \lambda)}{\partial \nu} \right| \cdot \Delta\nu + \left| \frac{\partial(\nu \cdot \lambda)}{\partial \lambda} \right| \cdot \Delta\lambda \tag{d- 6}$$

$$\Delta c = \lambda \cdot \Delta\nu + \nu \cdot \Delta\lambda \tag{d- 7}$$

$$\text{und} \qquad \frac{\Delta c}{c} = \left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| + \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| \qquad \text{(relativer Fehler).} \tag{d- 8}$$

Man setzt für λ und ν die Mittelwerte ein und für $\Delta\nu$ und $\Delta\lambda$ die mittleren Fehler der Einzelwerte. Bei einer einmaligen Messung muss man abschätzen, wie genau der Wert sein kann (z.B. Ablesegenauigkeit).

Beispiele

a) Zwei Messgrößen x_1 und x_2 hängen zusammen über die Formel $y = \frac{x_1}{x_2}$. Gesucht ist der Fehler von y.

Messergebnisse:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 6,2\,\mathrm{cm} \qquad \Delta\, x_1 = 0,1\,\mathrm{cm} \\
x_2 &= 3,1\,\mathrm{sec} \qquad \Delta\, x_2 = 0,1\,\mathrm{sec} \\
y &= \tfrac{6{,}2\,\mathrm{cm}}{3{,}1\,\mathrm{sec}} = 2,0\,\mathrm{cm/s} \\
\frac{\partial y}{\partial x_1} &= \tfrac{1}{x_2}, \qquad \tfrac{\partial y}{\partial x_2} = -\tfrac{x_1}{{x_2}^2} \\
\Delta y &= \left|\tfrac{1}{x_2}\right| \Delta x_1 + \left|-\tfrac{x_1}{{x_2}^2}\right| \Delta x_2 \\
\Delta y &= \tfrac{0{,}1}{3{,}1}\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}} + \tfrac{6{,}2\cdot 0{,}1}{(3{,}1)^2}\,\tfrac{\mathrm{cm\cdot sec}}{\mathrm{sec}^2} \approx 0,1\,\mathrm{cm/s} \\
\text{Ergebnis:}\quad y &= (2,0 \pm 0,1)\,\mathrm{cm/s}
\end{aligned}
$$

b) Die Erdbeschleunigung soll aus der Schwingungsdauer T und der Länge l eines mathematischen Pendels bei kleinen Auslenkungen des Pendels bestimmt werden. Welche der beiden Größen l und T muss mit grösserer Sorgfalt gemessen werden?

Die Erdbeschleunigung ist $g = 4\pi^2 l/T^2$. Damit folgt für den relativen Größtfehler $\Delta\bar{g}$ von $\bar{g}$ nach (d- 5):

$$\frac{\Delta\bar{g}}{\bar{g}} = \left(2\left|\frac{\Delta\bar{T}}{\bar{T}}\right| + \left|\frac{\Delta\bar{l}}{\bar{l}}\right|\right) \tag{d- 9}$$

Daraus folgt, dass die Messung der Schwingungsdauer T besonders sorgfältig erfolgen muss, da der Fehler der Zeitmessung doppelt so stark in den Größtfehler $\Delta\bar{g}$ von $\bar{g}$ eingeht wie der der Längenmessung.

Logarithmisches Differenzieren Man erreicht fast immer leicht eine Darstellung des relativen Fehlers, wenn man $\ln f$ in eine Taylor-Reihe entwickelt und nach dem 1. Glied abbricht. (Der absolute Fehler des ln einer Größe ist gleich dem relativen Fehler dieser Größe selbst.)

$$\Delta(\ln f) = \frac{\mathrm{d}(\ln f)}{\mathrm{d}f}\Delta f = \frac{\Delta f}{f} = F\left(\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}\right). \tag{d- 10}$$

$F(\Delta x/x, \Delta y/y)$ soll bedeuten, dass sich der relative Fehler des Ergebnisses $\Delta f/f$ (in %) als eine Funktion der relativen Fehler der Einzelmessung $\Delta x/x$ und $\Delta y/y$ (in %) angeben lässt.

Ist zur Bestimmung von f nur je eine Messung von x und y gemacht worden, so setzt man für $\Delta x/x$ und $\Delta y/y$ die geschätzte Messgenauigkeit der Einzelmessungen ein.

Beispiele zu c)

1) Zur Bestimmung der elektrischen Leistung [Watt] ist eine Strom- und eine Spannungsmessung gemacht worden. Auf dem Ampere- und Voltmeter ist die Messgenauigkeit mit 1% angegeben.

$$P = U \cdot I \qquad ; \qquad \ln P = \ln U + \ln I$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 1\% + 1\% = 2\%$$

2) Die Dichte eines Minerals sei durch eine Wägung (auf 1 g genau) und eine Volumenmessung durch Wasserverdrängung in einem Messzylinder (auf $0,5\,\mathrm{cm}^3$ genau) gemessen worden. Das Mineral habe eine Masse von 70 g und ein Volumen von $20\,\mathrm{cm}^3$.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0,5}{20} = 2,5\% \qquad \frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{70} = 1,4\%$$

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \ln \rho = \ln m - \ln V$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} = 2,5\% + 1,4\% \approx 4\%.$$

Ausgleich eines linearen Zusammenhangs

Man führt Messungen durch, wenn man die Richtigkeit einer Theorie überprüfen will. Die Überprüfung ist sehr leicht, wenn der theoretische Zusammenhang zwischen Messgrößen linear ist. Über die **mathematische Behandlung** des Problems der **Ausgleichsgeraden** informiere sich der interessierte Praktikant in der einschlägigen Literatur.

Graphisches Verfahren

Es bestehe ein linearer Zusammenhang $y = a_0 + a_1\,x$ zwischen den Messgrößen x und y, gesucht sind a_0 und a_1. Die gemessenen Wertepaare werden in ein Diagramm eingetragen und bei bekanntem Fehler mit **Fehlerbalken** versehen. Durch die streuenden Messpunkte legt man mit Hilfe eines durchsichtigen Lineals nach Augenmaß eine **Ausgleichsgerade**. Aus der **Steigung** der Geraden bestimmt man a_1, aus dem Schnittpunkt mit der Ordinate ($x = 0$) erhält man a_0. Für die Berechnung der Steigung wähle man zwei Punkte in möglichst großem Abstand auf der Ausgleichsgeraden (keine Messpunkte verwenden!). Der **Fehler der Steigung** folgt in grober Abschätzung aus den mit den Messpunkten zu vereinbarenden extremen Geradensteigungen.

Beispiel Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x_0} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}, \quad x_0 = (6 \pm 1)\,\mathrm{m} \\
x &= \text{Ortskoordinate}, \quad t = \text{Zeit-Koordinate} \\
v &= \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{47,5 - 6,5}{80 - 0}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 0,51\,\mathrm{m/s} \\
v_{\max} &= \frac{51 - 6,5}{80 - 7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 0,61\,\mathrm{m/s} \\
v_{\min} &= \frac{42,5 - 10,2}{80 - 0}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 0,40\,\mathrm{m/s} \\
v &= (0,5 \pm 0,1)\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Nichtlineare Gesetze Durch Einführen von **Hilfsgrößen** versucht man, nichtlineare Gesetze auf lineare Gesetze zurückzuführen.

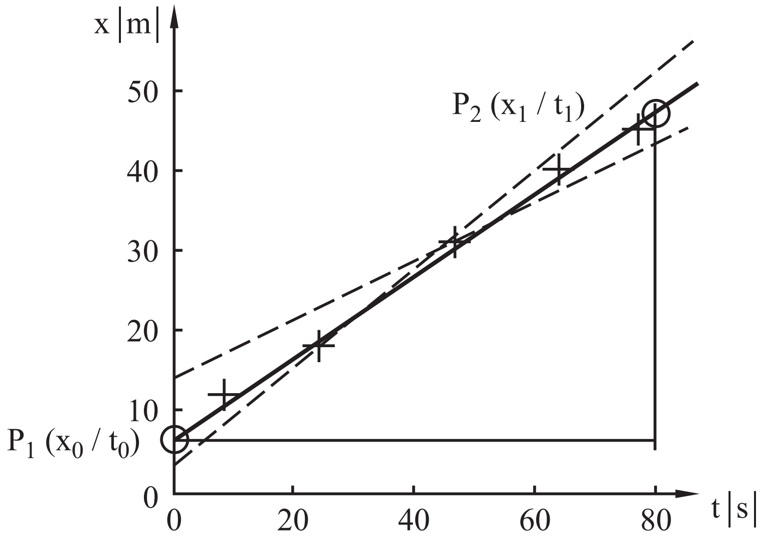

Abb. d- 1: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Beispiel 1 Gleichförmig beschleunigte Bewegung: $y = \frac{b}{2} \cdot t^2$. Im y-t-Diagramm ist diese Beziehung eine **Parabel**. Führt man die Hilfsgröße $x = t^2$ ein, lässt sich das Gesetz im y-x-Diagramm als **Gerade** darstellen.

Beispiel 2 Liegt eine **Exponentialfunktion** der Form $y = a \cdot e^{bx}$ vor, so entsteht durch **Logarithmieren** eine lineare Beziehung zwischen x und $\log y$:

$$\log y = \log a + x \cdot b \cdot \log e \qquad \text{Steigung: } m = b \cdot \log e$$

Der Zahlenwert von a ist gleich dem Ordinatenwert für $x = 0$. Seine Einheit ist gleich der Einheit von y. b erhält man aus der Steigung der Geraden:

$$m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log y_2/y_1}{x_2 - x_1}$$

Die Wertepaare (x_1/y_1) und (x_2/y_2) sind zwei Punkte auf der Ausgleichsgeraden. Bei der Röhrendiode liefert die Richardson-Gleichung den Zusammenhang zwischen dem Sättigungsstrom I_S, der Austrittsarbeit der Kathode $e_0\varphi_\mathrm{A}$ und der Temperatur T:

$$I_\mathrm{S} = A\,T^2\,e^{-\frac{e_0\varphi_\mathrm{A}}{kT}}$$

A: Konstante, k: Boltzmann-Konstante $= 8,614 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV\,K^{-1}}$
Messgrößen sind I_S und T (indirekt), gesucht ist $e_0\varphi_\mathrm{A}$.

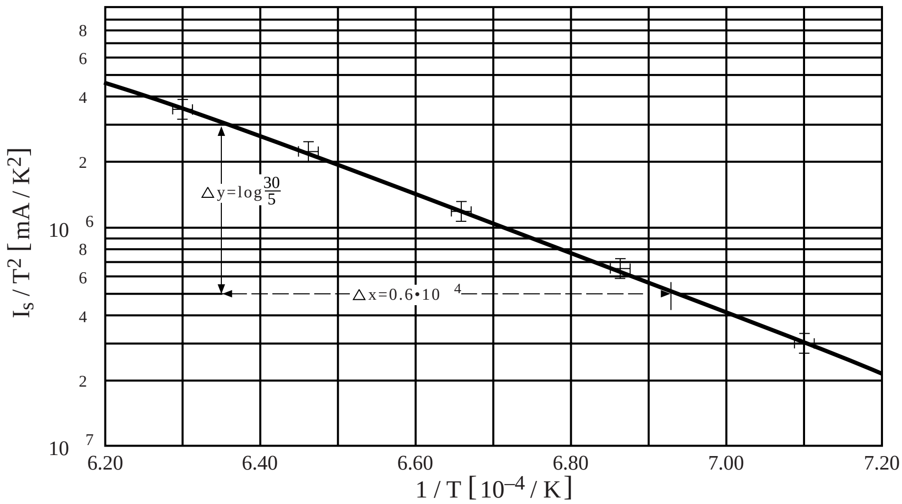

Abb. d- 2: Richardson-Gleichung: I_S/T^2 als Funktion der reziproken Temperatur für die Röhrendiode K 81 A

Durch Logarithmierung der Richardson-Gleichung erhält man folgenden linearen Zusammenhang:

$$\underbrace{\log \frac{I_S}{T^2}}_{y} = \underbrace{\log A}_{a} - \underbrace{\frac{e_0\,\varphi_A}{k} \cdot \log e}_{m} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}}_{x}$$

$$(y = a + m \cdot x)$$

$$\text{Steigung } m: \qquad m = \frac{\lg y_2 - \lg y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\lg \frac{5\cdot 10^{-7}}{3\cdot 10^{-6}}}{(6,95 - 6,35)\cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\mathrm{K}}} = -1,30 \cdot 10^4\,\mathrm{K}$$

(Der Logarithmus ist dimensionslos.)

$$e_0\,\varphi_A = -\frac{k}{\lg e} \cdot m \quad ; \quad \lg e = 0.4343$$

$$e_0\,\varphi_A = -\frac{8,614 \cdot 10^{-5}}{0,4343} \cdot \left(-1,30 \cdot 10^4\right)\ \mathrm{eV\,K^{-1} \cdot K}$$

$$e_0\,\varphi_A = 2,58\,\mathrm{eV}\,.$$

Die Fehlerrechnung muss im Zusammenhang mit dem Versuch durchgeführt werden.

Beispiel 3

Doppelt-logarithmische Auftragung Logarithmiert man $y = a \cdot x^b$, so erhält man $\log y = b \cdot \log x + \log a$, also eine lineare Beziehung zwischen $\log x$ und $\log y$.

$$\text{Steigung:} b = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

Achsenabschnitt a: Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Die y-Achse ist die Senkrechte durch $x/[x] = 1$, $(\log 1 = 0)$.

Literatur zur Fehlerrechnung

Taylor: ***Fehleranalyse*** Verlag Chemie, Weinheim

Lichten: ***Skriptum Fehlerrechnung*** Springer, Berlin

Walcher: ***Praktikum der Physik*** Teubner, Stuttgart

v. Sanden: ***Praktische Mathematik*** Teubner, Stuttgart

Hänsel: ***Grundzüge zur Fehlerrechnung*** Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Zurmühl: ***Praktische Mathematik***

Baule: ***Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs Bd. II***