

<b>E44      Elektromagnetische Induktion</b>	
Name:	Matrikelnummer:
Fachrichtung:	Versuchsdatum:
Mitarbeiter/in:	Gruppennummer:
Assistent/in:	Endtestat:

Dieser Fragebogen muss von jedem Teilnehmer **eigenständig** (keine Gruppenlösung!) handschriftlich beantwortet und vor Beginn des Versuchs abgegeben werden. Die Vorbereitung wird zusätzlich durch einen Test bzw. eine mündliche Prüfung über die physikalischen Grundlagen des Versuchs kontrolliert.  
(Version: 16. Oktober 2021)

### Versuchsziel und Versuchsmethode:

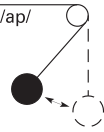
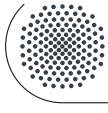
1.) Welche Wirkung hat ein Magnetfeld auf ein bewegtes Elektron?

2.) Skizzieren Sie den zeitlichen Stromverlauf beim Anlegen einer Gleichspannung an einer Spule. Was geschieht beim Abschalten der Spannung? Wie geht die Induktivität  $L$  einer Spule in dieses Verhalten ein?

3.) Unter welchen Voraussetzungen gilt Gleichung (E44-2)?

4.) Zeichnen Sie die Magnetfeldlinien zu folgenden Anordnungen:

- a) stromdurchflossener gerader Draht
- b) zwei parallel angeordnete Drähte, Strom fließe in gleicher Richtung
- c) dgl., jedoch Stromrichtung in den Drähten entgegengesetzt
- d) stromdurchflossener geschlossener Leiterring.



## E Elektrizitätslehre

### E44 Elektromagnetische Induktion

Diese Anleitung kann und soll kein Lehrbuch ersetzen. Die beschriebenen Grundlagen stellen einen kurzen Überblick dar und sind daher zum Erlernen der physikalischen Grundlagen nicht ausreichend. Genauere Beschreibungen finden sich in:

- [1] *Kapitel 4* Zeitlich veränderliche Felder. In: DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, 2013. – E-Book
- [2] *Kapitel 25* Die magnetische Induktion. In: TIPLER, P.: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer, 2015. – E-Book
- [3] *Kapitel 3* Statische Magnetfelder. In: DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, 2013. – E-Book
- [4] *Kapitel 24* Quellen des Magnetfelds. In: TIPLER, P.: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer, 2015. – E-Book
- [5] *Kapitel 5* Elektrotechnische Anwendungen. In: DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, 2013. – E-Book
- [6] *Kapitel 26* Wechselstromkreise. In: TIPLER, P.: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer, 2015. – E-Book
- [7] *Kapitel 6* Elektromagnetische Schwingungen und die Entstehung elektromagnetischer Wellen. In: DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, 2013. – E-Book
- [8] *Kapitel 21*. Messung zeitabhängiger Spannungen. In: EICHLER, H.-J.: *Das neue Physikalische Grundpraktikum*. Springer, 2016. – E-Book

#### Stichworte

Induktionsgesetz [1, 2], Selbstinduktion [1, 2], Gegeninduktion [1, 2], Magnetfeld von Spulen [3, 4], magnetischer Fluss [2, 3], Wechselstromwiderstände [5, 6], komplexer Spannungsteiler [5, 6], Schwingkreis [6, 7], Funktion und Bedienung eines Oszilloskops [8]

**Nur Physiker:** Durchflutungsgesetz [1], Biot-Savartsches Gesetz [3], Maxwell-Gleichungen [1]

#### Grundlagen

Stromdurchflossene Leiter sind von einem Magnetfeld umgeben, dessen Verlauf durch

in sich geschlossene Feldlinien dargestellt wird: Zeigt der gestreckte Daumen der linken Hand in Fließrichtung der Elektronen, so zeigen die (gekrümmten) Finger die Richtung der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  an. Nach dem Durchflutungsgesetz (1. Maxwell'sche Gleichung für Magnetostatik)

$$\oint \mathbf{H} \, ds = \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A} \quad (\text{E44-1})$$

ist jede elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}$  mit einer magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  verknüpft. Das Linienelement  $ds$  gehört zu einem beliebig wählbaren geschlossenen Integrationsweg, der die Fläche  $A$  (s. rechte Seite von Gl. (E44-1)) umschließt.

Dieses Gesetz kann beispielsweise benutzt werden, um das Feld im Innern einer langen Spule zu berechnen. Dazu wählt man den Integrationsweg wie folgt: Man bewegt sich zunächst entlang der Spulenachse (nahezu homogenes Feld  $\mathbf{H}$ ) und schließt den Weg im Unendlichen (praktisch kein Feld mehr vorhanden). Die linke Seite von Gl. (E44-1) ergibt somit  $H \cdot l$ , wenn  $l$  die Länge der Spule darstellt. Die Fläche, die der Integrationsweg umschließt, wird andererseits  $n$ -mal von der Stromdichte  $\mathbf{j}$  durchsetzt ( $n = \text{Windungszahl}$ ). Das Integral über die Fläche ergibt daher  $n \cdot I$ .

Auf diese Weise erhält man das bekannte Ergebnis für die Feldstärke in einer langgestreckten Spule.

$$H = \frac{n \cdot I}{l} \quad (\text{E44-2})$$

Das Durchflutungsgesetz gilt für räumlich beliebig verteilte Stromdichten  $\mathbf{j}$ . Häufig interessiert aber die Feldstärke im Punkt  $P$ , die von einem stromdurchflossenen Leiterstück der Länge  $dl$  im Abstand  $r$  von  $P$  erzeugt wird:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{E44-3})$$

Dies ist die Biot-Savartsche Formulierung des Durchflutungsgesetzes in differenzieller Form. Mithilfe dieses Gesetzes lässt sich z. B. der Feldverlauf in einer Zylinderspule berechnen.

## Magnetfeld einer Zylinderspule

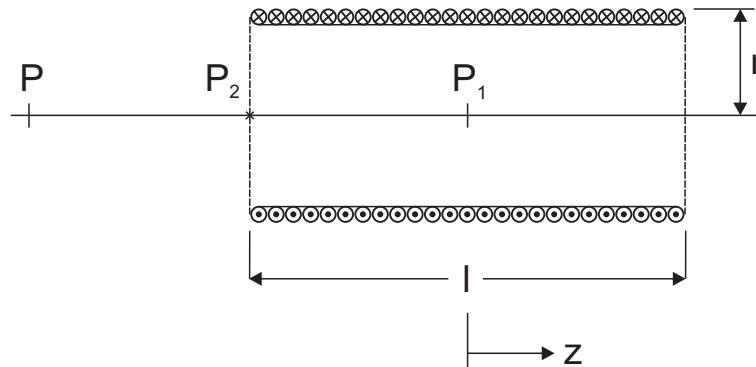


Abb. E44-1: Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke  $H$  auf der Achse  $z$  (Nullpunkt in Spulenmitte) einer vom Strom  $I$  durchflossenen Zylinderspule der Länge  $l$ , des Radius  $r$  und der Windungszahl  $n$ .

Für Punkte auf der Zylinderachse gilt folgender Feldverlauf:

$$H = \frac{n \cdot I}{2l} \left[ \frac{z + \frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2}} \right] \quad (\text{E44-4})$$

Sonderfälle:

1. In der Mitte der Spule ( $P_1$ ) ist  $z = 0$ :

$$H_1 = \frac{n \cdot I}{\sqrt{4r^2 + l^2}} \quad (\text{E44-5})$$

Für  $r \ll l$  geht (E44-5) über in

$$H = \frac{n \cdot I}{l} \quad (\text{E44-6})$$

2. Am Spulenanzfang ( $P_2$ ) ist  $z = l/2$ :

$$H_2 = \frac{n \cdot I}{2\sqrt{r^2 + l^2}} \quad (\text{E44-7})$$

Für  $r \ll l$  geht (E44-7) über in

$$H_2 = \frac{n \cdot I}{2l} = \frac{1}{2} H_1 \quad (\text{E44-8})$$

Die magnetische Auswirkung einer elektrischen Stromdichte  $\mathbf{j}$  hängt davon ab, ob und welcher Art Materie sich im Feld befindet: bekanntlich verstärkt die Gegenwart von Eisen die magnetische Feldwirkung. Man führt deshalb eine weitere Größe ein, die sog. Flussdichte  $\mathbf{B}$ , die über die Permeabilität  $\mu$  mit der Feldstärke  $\mathbf{H}$  verknüpft ist:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{Einheit: } [\mathbf{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T(Tesla)} \quad (\text{E44-9})$$

Darin ist  $\mu_r$  die dimensionslose, stoffspezifische Permeabilitätszahl und  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante (auch Induktionskonstante) mit dem Wert:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ . Für Vakuum und Luft ist  $\mu_r = 1$  und kann deshalb im Weiteren weggelassen werden.

Da  $\mathbf{B}$  als Flussdichte (bezogen auf die durchsetzte Fläche  $\mathbf{A}$ ) eingeführt wurde, ist der magnetische Fluss selbst definiert als:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{E44-10})$$

Während die 1. Maxwellsche Gleichung den Zusammenhang zwischen Stromstärke und magnetischer Feldstärke beschreibt, behandelt die 2. Maxwellsche Gleichung das Auftreten einer Induktionsspannung in einer Leiterschleife oder Spule:

$$U_{\text{ind}}(t) = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -n \cdot \dot{\Phi} \quad (\text{E44-11})$$

Eine Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$  tritt also immer dann auf, wenn sich der magnetische Fluss  $\Phi$  in der Spule zeitlich ändert. Dies kann durch Änderung der Feldstärke und/oder durch Änderung der felddurchsetzten Fläche bewirkt werden.

## Selbstinduktion

Die größtmögliche zeitliche Änderung des magnetischen Flusses erfolgt beim Ein- oder Ausschalten des Stroms durch eine Spule. Der von außen an die Spule angelegten konstanten Spannung  $U$  wirkt eine Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$  entgegen, die proportional zur Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi$  und damit proportional zur Änderung der Stromstärke  $I$  ist:

$$U_{\text{ind}}(t) = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (\text{E44-12})$$

Die Proportionalitätskonstante  $L$  wird als Induktivität der Spule bezeichnet. Als Folge der Induktionsspannung steigt beim Einschalten der Spulenstrom nicht sofort auf seinen stationären Wert an, sondern nähert sich diesem asymptotisch mit einer Zeitkonstante, die von  $L$  abhängt. Umgekehrt fällt der Spulenstrom beim Ausschalten nicht sofort auf Null, sondern nähert sich wiederum asymptotisch der Null. Dieses Phänomen wird als Selbstinduktion bezeichnet.

Die Selbstinduktion wirkt also wie ein Widerstand, der nur bei Stromänderungen in Erscheinung tritt. Man definiert deshalb den Wechselstromwiderstand einer Spule mit der Induktivität  $L$  zu

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L \quad (\text{E44-13})$$

Darin ist  $f$  die Frequenz des Wechselstroms. Die Spule  $L$  mit einem in Serie geschalteten Widerstand  $R$  nach Abb. E44-2 stellt einen frequenzabhängigen Spannungsteiler dar. Das Übertragungsverhalten  $U_a$  zu  $U_e$  entspricht einem sog. Tiefpassfilter: Für tiefe Frequenzen ist  $U_a \approx U_e$ , für hohe Frequenzen ist  $U_a \ll U_e$ .

## Gegeninduktion

Befindet sich in räumlicher Nähe zu einer Spule eine zweite Spule und wird diese vom magnetischen Fluss der ersten Spule durchsetzt, so entsteht auch an den Enden der zweiten Spule eine Induktionsspannung, wenn sich der Fluss ändert. Will man den magnetischen Fluss der ersten Spule optimal zu nutzen, wird die zweite Spule über die erste gewickelt (Transformatorprinzip). Das Auftreten einer Induktionsspannung in der zweiten Spule wird als Gegeninduktion oder wechselseitige Induktion bezeichnet.

## Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer langen, zylinderförmigen äußeren Spule, in deren Inneren eine kurze zweite Spule entlang der Zylinderachse  $z$  verschoben werden kann. Wir speisen einen Wechselstrom  $I(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$  in die äußere Spule und messen die

in der inneren Probepule induzierte Spannung  $U_{\text{ind}}$  in Abhängigkeit von ihrer Position  $z$ . Da sich die felddurchsetzte Fläche während des Experiments nicht ändert, beruht der Induktionsvorgang (Gegeninduktion) einzig auf der Feldänderung in der äußeren Spule:

$$H(t) = \frac{n_a}{l} I(t) = \frac{n_a}{l} \hat{I} \sin(\omega t) \quad (\text{E44-14})$$

$$\dot{H}(t) = \frac{n_a}{l} \omega \hat{I} \cos(\omega t) \quad (\text{E44-15})$$

Ist  $A$  konstant so gilt allgemein:

$$\dot{\Phi} = \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} = \mu_0 \dot{\mathbf{H}} A \quad (\text{E44-16})$$

Damit wird die beobachtete induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}}(t) = -n_i \mu_0 \dot{H}(t) A = -\frac{n_i \cdot n_a \cdot \mu_0}{l} A \omega \hat{I} \cos(\omega t) \quad (\text{E44-17})$$

$$= \hat{U}_{\text{ind}} \cos(\omega t) \quad (\text{E44-18})$$

Umgekehrt lässt sich aus der gemessenen Induktionsspannung die Feldstärke der äußeren Spule berechnen:

$$\dot{H}(t) = -\frac{1}{n_i A \mu_0} \hat{U}_{\text{ind}} \cos(\omega t) \quad (\text{E44-19})$$

$$H(t) = -\frac{1}{\omega n_i A \mu_0} \hat{U}_{\text{ind}} \sin(\omega t) \quad (\text{E44-20})$$

$$= \hat{H} \sin(\omega t) \quad (\text{E44-21})$$

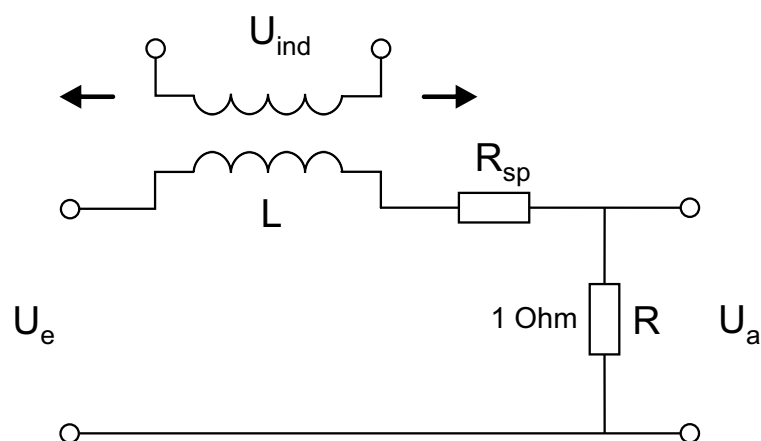


Abb. E44-2: Ersatzschaltbild für den Versuchsaufbau. Die innere Probepule (Ausgang  $U_{\text{ind}}$ ) kann horizontal verschoben werden.  $R_{\text{sp}}$  bezeichnet den ohmschen Widerstand des Spulendrahts.



## Messprogramm

### Selbstinduktion

1. Messen Sie das Übertragungsverhalten  $U_a$  zu  $U_e$  der aufgebauten  $LR$ -Anordnung für eine sinusförmige Wechselspannung (LD = Low Distortion) zwischen  $f = 100$  Hz und ca. 60 kHz in Schritten, die ungefähr mit Faktor 2 anwachsen (100, 200, 400). Wählen Sie ein Eingangssignal mit konstanter Amplitude  $U_{e, \text{eff}} \simeq 1$  V. Tragen Sie das Ergebnis  $\frac{U_a}{U_e}$  über  $f$  in doppelt logarithmischer Darstellung auf (sog. Bode-Diagramm). Extrapolieren Sie Ihre Messdaten für kleine Frequenzen  $f \rightarrow 0$ . Ermitteln Sie daraus den ohmschen Widerstand  $R_{\text{sp}}$  der Spule. Berechnen Sie zum Vergleich den Widerstand des Spulendrahts (Kupfer) aus den Spulendaten.

**Nur Physiker:** Leiten Sie einen Ausdruck für den komplexen Spannungsteiler  $\frac{U_a}{U_e}$  ab. Machen Sie eine Näherung für niedrige und für hohe Frequenzen und berechnen Sie mit geeigneten Messdaten erneut den Widerstand der Spule  $R_{\text{sp}}$  und die Induktivität  $L$  der Spule.

2. Die Spannung  $U_a$  am ohmschen Widerstand  $R$  ist proportional zum Stromfluss durch die Spule. Beobachten Sie den Verlauf von  $U_a$  bei Einspeisung einer Rechteckspannung mit  $U_{e, \text{eff}} \simeq 1$  V und  $f = 100$  Hz, 1 kHz und 10 kHz. Skizzieren oder speichern Sie jeweils die Signalverläufe. In welcher mathematischen Beziehung stehen  $U_e(t)$  und  $U_a(t)$  bei hohen Frequenzen offensichtlich zueinander (qualitativ - ohne Rechnung!)? Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit einem sinus- bzw. dreieckförmigen Eingangssignal.

### Gegeninduktion

3. Messen Sie den Verlauf der magnetischen Feldstärke der äußeren Spule durch Aufnahme der Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$  in der inneren Spule. Wählen Sie die sinusförmige Eingangsspannung  $U_e$  bei einer Frequenz  $f = 100$  Hz so, dass am Messwiderstand  $R = 1 \Omega$  eine Ausgangsspannung  $U_a$  von max.  $U_{a, \text{eff}} = 1$  V abfällt und beobachten Sie diese auf Kanal 1 (CH1) des Oszilloskops. Verschieben Sie nun die Induktionsspule von  $z = 0$  (Spulenmitte) bis  $z = 25$  cm in Schritten von 1 cm und messen Sie dabei  $U_{\text{ind}}$  auf Kanal 2 (CH2). Berechnen Sie die magnetische Flussdichte  $B$  aus den Induktionsspannungen und tragen Sie  $B$  über  $z$  auf. Wie groß ist  $B$  am Spulende? Vergleich mit der Theorie!
4. Schieben Sie die innere Spule in die Mittenposition ( $z = 0$ ). Messen Sie nun für ein Eingangssignal mit konstanter **Amplitude**  $U_e$  ( $U_{e, \text{eff}} \simeq 1$  V, für jede neue Frequenz  $U_e$  kontrollieren, ggf. nachregeln!) die Frequenzabhängigkeit des induzierten Signals  $U_{\text{ind}}$  von 20 Hz–300 Hz in 20 Hz-Schritten. Tragen Sie  $U_{\text{ind}}$  über  $f$  auf und diskutieren Sie das Ergebnis.
5. Untersuchen Sie nun den Einfluss der Signalform des Eingangssignals ( $U_{e, \text{eff}} \simeq 1$  V, 100 Hz). Stellen Sie den Generator auf Sinus- (LD = Low Distortion), Dreieck-

und Rechtecksignal und beobachten Sie das jeweils in der Probepule induzierte Signal. Stellen Sie den Signalverlauf von  $U_e$  und  $U_{\text{ind}}$  dar und erklären Sie Ihre Beobachtungen.

**Nur Physiker:** Bei genauer Beobachtung von  $U_{\text{ind}}$  bei eingespeistem Rechteck-Signal sieht man hinter jeder Spannungsspitze ein oszillierendes Signal. Messen Sie dessen Frequenz und erklären Sie die Ursache. Berechnen Sie damit die Induktivität der Probepule!

## Hinweise

- Alle Spannungen werden mit dem Oszilloskop gemessen. Mit der Taste „Measure“ lässt sich für jeden Kanal die gewünschte Messgröße wählen. Den genauesten Spannungswert erhält man mit dem „Type: RMS“ (Root Mean Square = Effektivwert), der für Sinussignale definitionsgemäß  $U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U}$  beträgt.
- Alle Messungen mit DC-Kopplung der Oszilloskop-Eingänge durchführen.
- Das Oszilloskopbild kann mit der Taste „Save/Recall“ als jpeg-Datei auf einen USB-Stick gespeichert werden.
- Das an die Probepule angeschlossene Koaxialkabel und der Eingang des Oszilloskops haben zusammen eine Kapazität von ca. 110 pF - welche Anordnung liegt vor?
- **Spulendaten:**

Äußere Spule:

Länge:  $l$  = 233 mm

Windungszahl:  $n_a$  = 117

Radius:  $r$  = 25 mm

Drahtdurchmesser:  $d$  = 1 mm

Innere Spule:

Länge:  $l_i$  = 5 mm

Windungszahl:  $n_i$  = 1000

Fläche:  $A$  = 350 mm<sup>2</sup>