M10 Trägheitsmomente aus Drehschwingungen

Name:	Matrikelnummer:
Fachrichtung:	Versuchsdatum:
Mitarbeiter/in:	Gruppennummer:
Assistent/in:	Endtestat:

Dieser Fragebogen muss von jedem Teilnehmer **eigenständig** (keine Gruppenlösung!) handschriftlich beantwortet und vor Beginn des Versuchs abgegeben werden. Die Vorbereitung wird zusätzlich durch einen Test bzw. eine mündliche Prüfung über die physikalischen Grundlagen des Versuchs kontrolliert.
(Version: 18. November 2024)

Versuchsziel und Versuchsmethode:

1.) Wie sieht das Trägheitsellipsoid aus, wenn alle Hauptträgheitsmomente gleich sind? Können in diesem Fall Deviationsmomente auftreten?

2.) Bei welcher Art von Drehbewegungen spielen Nebenträgheitsmomente eine Rolle und wie wirken sich diese aus? Erläutern Sie die Begriffe „statische Unwucht" und „dynamische Unwucht".

3.) Erläutern Sie den Steinerschen Satz!

4.) Vergleichen Sie die kinetische Energie der Translation mit der Rotationsenergie, sowie Impuls mit Drehimpuls. Welche Analogien erkennen Sie? Wie lässt sich die Rotationsenergie mit Hilfe des Drehimpulses und des Trägheitsmomentes ausdrücken?

5.) Ein massiver Zylinder und ein dünnwandiges Rohr gleichen Durchmessers und gleicher Gesamtmasse werden gleichzeitig vom höchsten Punkt einer schiefen Ebene freigegeben und rollen ohne zu rutschen hinab. Welcher Körper kommt zuerst unten an und warum?

6.) *Nur Physiker:* Wie lautet die Differentialgleichung für eine gedämpfte Drehschwingung? Wie wirkt sich die Dämpfung auf die Eigenfrequenz des Schwingsystems aus (qualitativ)?

7.) *Nur Physiker:* Wieviele Messungen sind nötig, um den Trägheitstensor eindeutig zu bestimmen?

M Mechanik

M10 Trägheitsmomente aus Drehschwingungen

Diese Anleitung kann und soll kein Lehrbuch ersetzen. Die beschriebenen Grundlagen stellen einen kurzen Überblick dar und sind daher zum Erlernen der physikalischen Grundlagen nicht ausreichend. Genauere Beschreibungen finden sich in:

[1] *Kapitel* Trägheitsmoment. In: Eichler, H.-J.: *Das neue Physikalische Grundpraktikum.* Springer, 2016. – E-Book

[2] *Kapitel* Trägheitsmoment und Rotationsenergie. In: Demtröder, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme.* Springer, 2015. – E-Book

[3] *Kapitel* Dynamik starrer ausgedehnter Körper. In: Demtröder, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme.* Springer, 2015. – E-Book

[4] *Kapitel* Mechanik des starren Körpers. In: Meschede, D.: *Gerthsen Physik.* Springer, 2010. – E-Book

[5] *Kapitel* Einführung. In: Meschede, D.: *Gerthsen Physik.* Springer, 2010. – E-Book

[6] *Kapitel* Mechanik der Massenpunkte. In: Meschede, D.: *Gerthsen Physik.* Springer, 2010. – E-Book

[7] *Kapitel* Mechanik eines Massenpunktes. In: Demtröder, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme.* Springer, 2015. – E-Book

Stichworte

Starrer Körper [3, 4], Trägheitsmoment [2], Schwerpunkt [3, 4], Drehachse [4], Steinerscher Satz [3], Drehschwingung [4], Winkelgeschwindigkeit [4], Bogenmaß [5], Federkonstante [6], Winkelrichtgröße [4], Trägheitsellipsoid [3], mechanische Energieerhaltung [7].

Grundlagen

Man kann für einen starren Körper um jede beliebige Drehachse ein Trägheitsmoment J definieren:

$$J = \int r_\perp^2 \;\mathrm{d}m \qquad \text{(M10-1)}$$

$r_\perp$ ist der senkrechte Abstand des Massenelements dm von der Drehachse. Bei Wahl einer anderen Drehachse ändert sich das Trägheitsmoment. Aus Symmetriegründen genügt für die allgemeine Beschreibung der Trägheitsmomente eines beliebig geformten Körpers ein Tensor 2. Stufe:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{J}}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \tag{M10-2}$$

Für einfache geometrische Körper (Scheibe, Zylinder, Kugel, Quader...) lässt sich das Integral M10-1 analytisch lösen und liefert einfache Ausdrücke für Rotationsachsen um die Symmetrieachsen des jeweiligen Körpers mit der Masse m. Bei bekanntem Trägheitsmoment J_S für eine Achse durch den Schwerpunkt lässt sich mithilfe des Steinerschen Satzes das Trägheitsmoment J_P für eine um den Abstand l verschobene parallele Achse berechnen zu:

$$J_\mathrm{P} = J_\mathrm{S} + ml^2 \tag{M10-3}$$

Zur experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente werden die zu untersuchenden Körper auf die Achse einer Spiralfeder gesetzt, wo sie Drehschwingungen ausführen. Aus der Schwingungsgleichung für die ungedämpfte Drehschwingung

$$J \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\,D'\varphi \tag{M10-4}$$

(D': Winkelrichtgröße der Spiralfeder; φ: Drehwinkel)

folgt für die Schwingungsdauer T

$$T(\hat{\omega}) = 2\pi\sqrt{\frac{J(\hat{\omega})}{D'}} \tag{M10-5}$$

Somit lässt sich bei bekannter Winkelrichtgröße aus der Schwingungsdauer das Trägheitsmoment für eine ausgewählte Achse ω bestimmen. $\hat{\omega}$ ist ein Vektor der Länge 1, der in Richtung der Drehachse zeigt.

Trägheitsellipsoid

Das Trägheitsmoment ist ein Tensor 2. Stufe mit 9 Komponenten, von denen im Fall des Trägheitstensors aber nur 6 Komponenten voneinander unabhängig sind. Ein solcher symmetrischer Tensor kann durch ein Ellipsoid (Trägheitsellipsoid) veranschaulicht werden. Die kinetische Energie der Drehbewegung (Rotationsenergie) ist gegeben durch

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^\mathrm{t}\,\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}\,\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,(\omega_x\,,\omega_y\,,\omega_z) \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,J(\hat{\omega})\,|\omega|^2 \tag{M10-6}$$

wobei $J(\hat{\omega})$ das Trägheitsmoment in bezug auf die durch ω gegebene Drehachse ist und $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}$ der Trägheitstensor mit seinen Diagonalelementen J_{ii} und den **Nebenträgheits-** oder **Deviationsmomenten** J_{ik}.

Teilt man Gleichung (M10-6) durch $|\omega|^2$ so erhält man

$$\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{t}}}{|\omega|}\,\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}\,\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\omega|} = J(\hat{\omega}) \tag{M10-7}$$

$$\hat{\omega}^{\mathrm{t}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}\,\hat{\omega} = J(\hat{\omega}) \tag{M10-8}$$

Division von Gleichung (M10-8) durch $J(\hat{\omega})$ ergibt

$$\frac{\hat{\omega}^{\mathrm{t}}}{\sqrt{J(\hat{\omega})}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}\,\frac{\hat{\omega}}{\sqrt{J(\hat{\omega})}} = 1 \tag{M10-9}$$

Ist $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}$ diagonalisiert, d. h. durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalform gebracht (auf jeden Fall möglich bei symmetrischen Tensoren), so schreibt sich Gleichung (M10-9) als

$$\frac{(\hat{\omega}_x\,,\hat{\omega}_y\,,\hat{\omega}_z)}{\sqrt{J(\hat{\omega})}}\begin{pmatrix} J_x & 0 & 0\\ 0 & J_y & 0\\ 0 & 0 & J_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\omega}_x\\ \hat{\omega}_y\\ \hat{\omega}_z\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{J(\hat{\omega})}} = 1 \tag{M10-10}$$

$$\frac{\left(\frac{\hat{\omega}_x}{\sqrt{J(\hat{\omega})}}\right)^2}{\frac{1}{J_x}} + \frac{\left(\frac{\hat{\omega}_y}{\sqrt{J(\hat{\omega})}}\right)^2}{\frac{1}{J_y}} + \frac{\left(\frac{\hat{\omega}_z}{\sqrt{J(\hat{\omega})}}\right)^2}{\frac{1}{J_z}} = 1 \tag{M10-11}$$

Der Vergleich mit der mathematischen Beschreibung eines Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{M10-12}$$

liefert für die Halbachsen des Trägheitsellipsoids

$$a \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{1}{J_x}} \qquad b \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{1}{J_y}} \qquad c \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{1}{J_z}}$$

J_x, J_y und J_z sind die Eigenwerte des Trägheitstensors und heißen **Hauptträgheitsmomente**.

Wählt man eine Drehachse A mit $\hat{\omega}_{\mathrm{A}}$ in Richtung derselben und misst die entsprechende Schwingungsdauer $T(\hat{\omega}_{\mathrm{A}})$, so ist nach Gleichung (M10-5)

$$\frac{1}{\sqrt{J(\hat{\omega}_{\mathrm{A}})}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{D'}}\cdot\frac{1}{T(\hat{\omega}_{\mathrm{A}})} = \mathrm{const}\cdot\frac{1}{T(\hat{\omega}_{\mathrm{A}})} \quad , \tag{M10-13}$$

und der Vektor $\frac{\hat{\omega}}{\sqrt{J(\hat{\omega})}}$ ist gerade so lang, dass seine Spitze auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoids liegt.

Da der Trägheitstensor in Hauptachsenform durch die drei Hauptträgheitsmomente J_i dargestellt werden kann, genügt es, diese drei zu bestimmen, um rechnerisch das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse $\hat{\omega}$ zu ermitteln.

Messprogramm

Es soll das Trägheitsellipsoid eines symmetrischen Körpers ausgemessen werden. Der Körper besteht aus einer Kugel K mit Bohrungen auf drei zueinander senkrecht stehenden Großkreisen (siehe Abb. M10-1, M10-2). In diese Bohrungen (in Abb. M10-3 z.B. A, B, C, D ; a, b, c, d und 1, 12, 11, 10 usw.) können Stangen S geschraubt werden, auf denen man Massen m verschiebbar aufstecken kann (siehe Abb. M10-4)

Abb. M10-1: Schwingung um z-Achse.

Abb. M10-2: Schwingung um y-Achse.

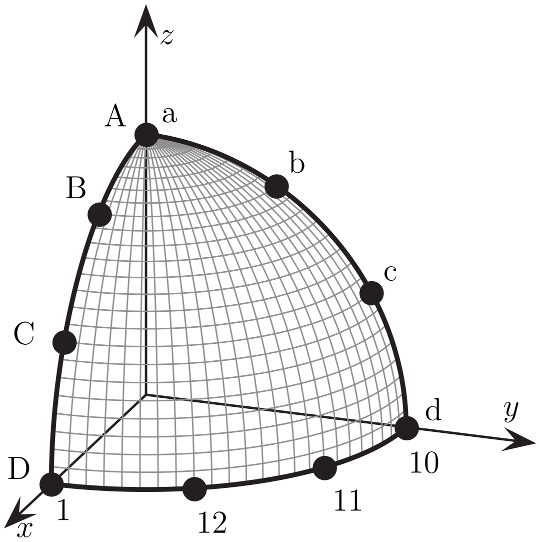

Abb. M10-3: Kugel-Oktant.

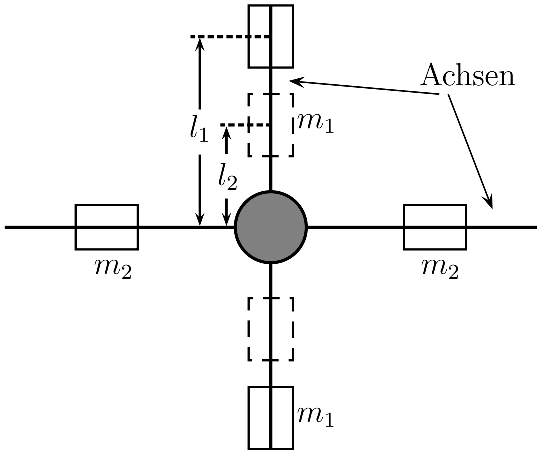

Abb. M10-4: Draufsicht.

Die Bestimmung der Winkelrichtgröße D' erfolgt aus didaktischen Gründen mit zwei Methoden.

1. Statische Methode
   Messen Sie an einem Körper gemäß Abb. (M10-4) die Kraft F, die zum Aufziehen der Spiralfeder um $\varphi = 360°$ (bzw. 2π) benötigt wird. Berechnen Sie die Winkelrichtgröße D' mithilfe der Messwerte F, l und φ und geben Sie das Ergebnis in Nm/rad an.

2. Dynamische Methode
   Messen Sie die Schwingungsdauern zweier Systeme (bei zwei **deutlich** verschiedenen Abständen l_i gegenüberliegender Massen m von der Drehachse, s. Abb. M10-4) je fünf mal über mehrere Perioden. Die Massen der Zusatzkörper werden mit der Waage bestimmt. Berechnen Sie wiederrum die Winkelrichtgröße D'.

3. Konstruieren Sie einen symmetrischen Körper mit stark anisotroper (d.h. richtungsabhängiger) Massenverteilung und messen Sie die Schwingungszeiten des Körpers (je 3 mal) um alle möglichen Achsen in den drei Hauptebenen des Trägheitsellipsoids, indem Sie die Bohrungen eines Kugeloktanten für die Drehachsen benutzen. Zeichnen Sie die Hauptschnitte des Trägheitsellipsoids auf Polarkoordinatenpapier, wobei Sie eine zu $1/\sqrt{J}$ proportionale Größe (z.B. $1/T$) als Radiusvektor auftragen.

4. Führen Sie die letzte Aufgabe ebenfalls für einen isotropen Körper aus. Konstruieren Sie einen Körper mit ziemlich gleichmäßiger (isotroper) Massenverteilung in der durch die Stangen aufgespannten horizontalen Ebene. Messen Sie die Schwingungsdauern um die Achsenpositionen (30°-Schritte) zwischen den Stangen und überzeugen Sie sich, dass nun die Trägheitsmomente für alle Drehachsen in der von den Stangen aufgespannten Ebene (nicht auf dem Oktanten!) gleich sind!
   Zeichnen Sie wie unter 3.) in einem separaten Diagramm den Hauptschnitt des

Trägheitsellipsoids in der durch die Stangen aufgespannten Ebene auf Polarkoordinatenpapier.

5. Berechnen Sie die zwei (im isotropen Fall) bzw. drei (im anisotropen Fall) Hauptträgheitsmomente J_x, J_y und J_z nach Gl. (M10-5) bzw. Gl. (M10-13) aus D' und den Hauptschnitten.

Hinweise

- Zur statischen Methode: Hängen Sie dazu den Federkraftmesser an der Feststellschraube einer auf einen definierten Abstand l zur Drehachse positionierten Masse m ein und führen Sie aus der Ruhelage heraus durch Ziehen des Federkraftmessers **senkrecht** zur Verbindungsstange eine komplette Umdrehung durch.
- Zur dynamischen Methode: Nach der Definition des Trägheitsmomentes Gl. (M10-3) kann hier das Trägheitsmoment J in einen konstanten Anteil J_S und einen veränderlichen Anteil $m\,l_1^2$ (bzw. $m\,l_2^2$) aufgeteilt werden. Berechnet man die Differenz der beiden Trägheitsmomente (bei verschiedenen l), so fällt der unbekannte konstante Anteil J_S heraus. Dann kann D' aus der Differenz der beiden Schwingungsdauern mittels Gl. (M10-5) bestimmt werden:

$$D' = \frac{4\pi^2 \ \cdot 2\ m\ \ (l_1^2 - l_2^2)}{T_1^2 - T_2^2} \tag{M10-14}$$

- In der Gleichung zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D' ist als Masse m der Wert eines einzelnen Massenstücks des aufgesteckten Paares einzusetzen.
- In Gl. (M10-14) scheint der Bezug zum Winkel verloren gegangen zu sein - D' muss die Dimension Drehmoment/Winkel haben! Dies liegt daran, dass die *Winkelgeschwindigkeit* ω ($\omega = \mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}t$) bei Verwendung des Bogenmaßes in rad/s gemessen wird, rad (Radiant = Bogenlänge 1m / Radius 1m) aber üblicherweise durch “1“ ersetzt wird. Damit ist die *Winkelgeschwindigkeit* ω bzgl. der Dimension nicht mehr von der *Kreisfrequenz* ω ($\omega = 2\pi f$) zu unterscheiden. Analog zur Schwingungsdauer T, die per Definition in s/Periode gemessen wird, gilt für die Winkelrichtgröße D' per Definition N m/rad.
- Wenn Sie die kleinen Massen auf zwei gegenüberliegenden Stangen nach innen, die großen Massen auf den beiden anderen Stangen nach außen positionieren ist die Massenverteilung stark anisotrop.
- Am schnellsten erhalten Sie eine isotrope Masserverteilung, wenn Sie die einander gegenüberliegenden kleinen Massen symmetrisch nach außen platzieren und die großen Massen symmetrisch so nach innen justieren, dass die Schwingungsdauern um die beiden Achsen, auf denen die Massen befestigt sind, gleich werden.