

<b>M42      Kreisel mit drei Achsen</b>	
Name:	Matrikelnummer:
Fachrichtung:	Versuchsdatum:
Mitarbeiter/in:	Gruppennummer:
Assistent/in:	Endtestat:

Dieser Fragebogen muss von jedem Teilnehmer **eigenständig** (keine Gruppenlösung!) handschriftlich beantwortet und vor Beginn des Versuchs abgegeben werden. Die Vorbereitung wird zusätzlich durch einen Test bzw. eine mündliche Prüfung über die physikalischen Grundlagen des Versuchs kontrolliert.  
(Version: 16. Oktober 2021)

### Versuchsziel und Versuchsmethode:

1.) Stellen Sie die physikalisch relevanten Größen für die Beschreibung einer linearen Bewegung und einer Drehbewegung einander gegenüber.

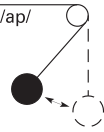
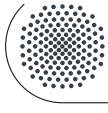
2.) Wie ist der Bahndrehimpuls, wie der Eigendrehimpuls definiert?

3.) Worin unterscheiden sich Nutation und Präzession?

4.) Berechnen Sie das Trägheitsmoment für die im Versuch verwendete dicke Scheibe (Masse  $m = 1330$  g, Durchmesser  $d = 245$  mm, Dicke  $h = 28$  mm) bezüglich der gewählten Drehachse (siehe Foto des Versuchsaufbaus)!

5.) Wie steuert man ein Fahrrad beim freihändigen Fahren?

6.) Wie reagiert ein Kreisel auf einen Kraftstoß auf die Drehachse?



## M Mechanik

### M42 Kreisel mit drei Achsen

**Diese Anleitung kann und soll kein Lehrbuch ersetzen.** Die beschriebenen Grundlagen stellen einen kurzen Überblick dar und sind daher zum Erlernen der physikalischen Grundlagen nicht ausreichend. Genauere Beschreibungen finden sich in:

- [1] *Kapitel* Dynamik starrer ausgedehnter Körper. In: DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer, 2015. – E-Book
- [2] *Kapitel 2* Mechanik des starren Körpers. In: MESCHÉDE, D.: *Gerthsen Physik*. Springer, 2010. – E-Book
- [3] *Kapitel* Mechanik eines Massenpunktes. In: DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer, 2015. – E-Book
- [4] *Kapitel* Trägheitsmoment und Rotationsenergie. In: DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer, 2015. – E-Book

#### Stichworte

Rotation [1, 2], Drehimpuls [3], Drehmoment [2, 3], Trägheitsmoment [2, 4], Trägheitseipsoid [1, 2], Kreisel [1, 2], Präzession [1, 2], Nutation [1, 2].

#### Grundlagen

Starre Körper, die um eine nicht fixierte ("freie") Achse rotieren können, nennt man Kreisel. Wir betrachten den Fall eines symmetrischen Kreisels, dessen Trägheitstensor zwei identische Hauptachsenwerte  $J_x = J_y$  besitzt. Bei Rotation um die z-Achse ist die Figurenachse zugleich Symmetrieachse. Die Bewegungsformen eines solchen Kreisels unter dem Einfluss äußerer Kräfte erscheinen kompliziert, sind aber wichtige Grundlagen für das Verständnis "atomarer Kreisel" wie z.B. Kern- oder Elektronenspins.

Drehbewegungen lassen sich formal analog zu Translationsbewegungen beschreiben, wenn man deren Größen durch die entsprechenden Größen für Drehbewegungen ersetzt. So wird z. B. aus der Strecke  $s$  der Winkel  $\varphi$ , aus der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ , aus der Masse  $m$  der Trägheitstensor  $\underline{\mathbf{J}}$  und aus dem Impuls  $\mathbf{p}$  der Drehimpuls  $\mathbf{L}$ .

Bei der Drehbewegung eines starren Körpers bewegen sich alle Punkte in einer Ebene senkrecht zur Drehachse um den gleichen Winkel  $\varphi$ , wobei eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv definiert ist. Zur Beschreibung werden vor allem folgende Größen benötigt:

Das Trägheitsmoment  $J$  eines Körpers bezüglich einer Achse  $A$  ist definiert als

$$J = \int r^2 dm, \quad (\text{M42-1})$$

wobei  $r$  der (senkrechte) Abstand des Massenelements  $dm$  von der Drehachse  $A$  ist. Der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ergibt sich zu:

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} \quad (\text{M42-2})$$

Wirkt ein äußeres Drehmoment  $\mathbf{M}$  so ändert sich der Drehimpuls:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (\text{M42-3})$$

Daraus folgt sofort, dass der Drehimpuls beim Verschwinden von äußeren Drehmomenten erhalten bleibt, was technisch beim Gyroskop (Kreiselkompass) ausgenutzt wird.

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der eine Drehbewegung ausführt und wird symmetrisch genannt, wenn zwei der Hauptträgheitsmomente gleich sind. Verschwinden die äußeren Drehmomente (oder heben sich auf), so ist der Kreisel kräftefrei. Wirkt auf den symmetrischen Kreisel ein konstantes Drehmoment parallel zur Drehimpulsrichtung, so kann man aus der Messung der Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}$  das Trägheitsmoment des Kreisels bestimmen:

$$J = \frac{M}{\alpha} \quad (\text{M42-4})$$

Wirkt auf den Kreisel ein resultierendes Drehmoment mit einer Komponente senkrecht zum Drehimpuls, so kommt es entweder zur Nutation (bei kurzer äußerer Einwirkung) oder zur Präzession (bei zeitlich konstantem äußerem Drehmoment).

Unter Präzession versteht man das senkrechte Ausweichen eines Kreisels bezüglich einer auf ihn wirkenden Kraft. Dies wird durch das Drehmoment  $\mathbf{M}$  verursacht, denn natürlich ändert sich der Drehimpuls nach dem Newtonschen Aktionsprinzip in Richtung des auf ihn einwirkenden Drehmoments, das jedoch senkrecht auf der wirkenden Kraft steht!

Greift die Kraft (oder eine Komponente) immer senkrecht zum Drehimpuls an, so ändert der Drehimpulsvektor nur seine Richtung, aber nicht seinen Betrag. Dadurch beschreibt die Spitze des Drehimpulsvektors eine Kreisbewegung, der die Präzessionsfrequenz  $\omega_p$  zugeordnet wird:

$$\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|}{J\omega} \quad (\text{M42-5})$$

$$J = \text{Trägheitsmoment}, \quad \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit des Kreisels}$$

Wie man sieht, kann im Fall des hier behandelten symmetrischen Kreisels auch aus der Präzessionsfrequenz das Trägheitsmoment  $J$  bestimmt werden.

Die Nutation wird durch einen kurzen seitlichen Stoß auf die Drehachse des Kreisels ausgelöst. In dessen Folge kommt es zu einer Taumel- und Nickbewegung, bei der Figurenachse, momentane Drehachse und Drehimpulsvektor  $\mathbf{L}$  nicht mehr zusammenfallen. Da der Drehimpulsvektor nach Ende des Kraftstoßes seine Richtung nicht mehr ändert, führen Figurenachse und momentane Drehachse eine Rotation um die Richtung des Drehimpulses durch. Anschaulich machen kann man sich die Bewegung mit dem Abrollen von zwei im Kreiselschwerpunkt befestigten Kegeln aufeinander. Der mit dem Kreisel fest verbundene Gangpolkegel wälzt sich auf dem raumfesten Rastpolkegel ab und die Kreisellachse als Achse des Gangpolkegels läuft auf dem Nutationskegel um die Drehimpulsrichtung.

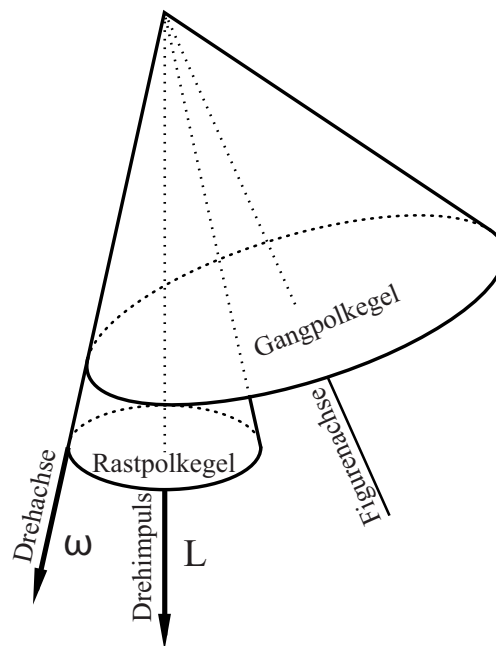


Abb. M42-1: Erklärung der Nutationsbewegung. Die Figurenachse beschreibt den im Experiment beobachtbaren Nutationskegel

### Messprogramm

1. Messen Sie das Trägheitsmoments der Kreiselscheibe direkt aus der Winkelbeschleunigung bei bekanntem Drehmoment. Verwenden Sie Gewichte von 110 g und 160 g (2 und 3 Schlitzgewichte) je 5 mal als beschleunigendes Drehmoment und bilden Sie den Mittelwert der Messungen.
2. Messen Sie die Abbremsung des Kreisels durch Reibung. Tragen Sie die Drehzahl über der Zeit auf halb-logarithmischer Skala auf. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante. Beginnen Sie 3 Mal mit jeweils 400 bis 500 U/min und messen Sie für 60 s alle 5 s die Drehzahl.
3. Messen Sie die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz für zwei unterschiedliche Drehmomente. Tragen Sie die Messwerte in einem Diagramm

auf, berechnen Sie das Trägheitsmoment und schätzen Sie den Fehler ab. Verwenden Sie 10 verschiedene Rotationsfrequenzen im Bereich von 300 bis 800 U/min und Gewichte von 10 g und 60 g.

4. Messen Sie die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz und stellen Sie Ihre Ergebnisse in einem Diagramm da. Verwenden Sie 10 verschiedene Rotationsfrequenzen im Bereich von 150 bis 500 U/min.

## Hinweise

**Achtung:** Das Drehzahlmessgerät ist mit einem Laser der Laserklasse 2 nach EN 60 825-1: 1994 ausgerüstet. Die Laseraustrittsöffnung ist mit dem dreieckigen Laserwarnschild gekennzeichnet. Blicken Sie nie in den Laserstrahl und richten Sie ihn niemals auf Personen oder Tiere. Laserstrahlung kann zu Augen- oder Hautverletzungen führen.

Richten Sie den Laserstrahl niemals auf Spiegel oder andere stark reflektierende Flächen. Der unkontrolliert abgelenkte Strahl könnte Personen oder Tiere treffen. Zur Messung sind bereits Reflektionsmarken am Kreisel angebracht.

- Wir verwenden die Bezeichnung “Gewicht“ für ein Massestück  $m$ , das im Schwerfeld der Erde eine Gewichtskraft  $\mathbf{F}$  ausübt.
- Als konstantes Drehmoment verwendet man ein beschleunigendes Gewicht. Die Kreiselachse wird horizontal ausgerichtet und mit Hilfe der Arretierstange fest gespannt. An den aufgewickelten Faden wird bei festgehaltener Scheibe das Gewicht angehängt, so dass dessen Unterkante auf dem Niveau der Tischplatte ist. Nach der Freigabe der Scheibe wird die Zeit zwischen dem Loslassen und dem Auftreffen des Gewichts auf dem Boden gestoppt und direkt die Drehzahl der Scheibe gemessen. Der Radius der Fadentrommel beträgt 22,5 mm. Aus den gemessenen Werten wird das Trägheitsmoment berechnet und der Fehler abgeschätzt.
- Zur Vorbereitung der folgenden Messungen bestimmen Sie, wie die Drehzahl des Kreisels mit der Zeit abnimmt.
- Um die Präzession zu messen entfernen Sie die Arretierung und bringen Kreiselachse mit Hilfe des Gegengewichts ins Gleichgewicht. Prüfen Sie, dass die Kreiselachse bei beliebiger Neigung stabil ist.  
Der freie Kreisel wird bei horizontaler Kreiselachse aufgezogen. Dann wird in die Nut hinter dem Gegengewicht das Gewicht eingehängt und der Kreisel freigegeben. Die Zeit für eine halbe Präzession wird gestoppt und am Anfang und Ende jeweils die Rotationsfrequenz gemessen und gemittelt. Dieser Wert wird gegen die Präzessionsdauer aufgetragen, aus den Steigungen ergibt sich das Trägheitsmoment. Der Abstand der Nut vom Lagerpunkt der Kreiselachse beträgt 270 mm.
- Ziehen Sie zur Messung der Nutationsfrequenz den freien Kreisel auf. Durch einen leichten seitlichen Schlag gegen die Kreiselachse kann die Nutation erzeugt werden. Die Zeit für 5 Nutationsumläufe wird gestoppt und am Anfang und Ende jeweils die Rotationsfrequenz gemessen und gemittelt.