M50 Bestimmung der Gravitationskonstanten mit der Gravitations-Drehwaage

Name:	Matrikelnummer:
Fachrichtung:	Versuchsdatum:
Mitarbeiter/in:	Gruppennummer:
Assistent/in:	Endtestat:

Dieser Fragebogen muss von jedem Teilnehmer **eigenständig** (keine Gruppenlösung!) handschriftlich beantwortet und vor Beginn des Versuchs abgegeben werden. Die Vorbereitung wird zusätzlich durch einen Test bzw. eine mündliche Prüfung über die physikalischen Grundlagen des Versuchs kontrolliert. (Version: 18. November 2024)

Versuchsziel und Versuchsmethode:

1.) Der Torsionsfaden hat einen extrem kleinen Radius. Wie wirkt sich dies auf die Winkelrichtgröße D und die Schwingungsdauer T aus?

2.) Wie groß ist die Anziehungskraft F_{G} zwischen großer und kleiner Kugel?

3.) Unter welcher Vorraussetzung kann in Frage 2 mit zwei Massenpunkten gerechnet werden?

4.) Berechnen Sie die Erdmasse mit Hilfe der Erdbeschleunigung g, der Gravitationskonstanten G und des Erdradius R.

5.) Welche anderen fundamentalen Wechselwirkungen gibt es, und welches sind die charakteristischen Unterschiede dieser zur Gravitationswechselwirkung?

M Mechanik

M50 Bestimmung der Gravitationskonstanten mit der Gravitations-Drehwaage

Diese Anleitung kann und soll kein Lehrbuch ersetzen. Die beschriebenen Grundlagen stellen einen kurzen Überblick dar und sind daher zum Erlernen der physikalischen Grundlagen nicht ausreichend. Genauere Beschreibungen finden sich in:

[1] *Lehrbücher der Experimentalphysik*

Stichworte

Gravitation, Gravitationsgesetz, Gravitations-Drehwaage, fundamentale Wechselwirkungen.

Grundlagen

1. Nach Newton übt eine Masse m_1, die sich im Abstand r von einer zweiten Masse m_2 befindet, auf diese eine Anziehungskraft vom Betrag

$$F = G \frac{m_1 \, m_2}{r^2} \tag{M50-1}$$

aus. Wegen des Reaktionsprinzips wirkt dieselbe Kraft von m_2 auf m_1 zurück. Die Gravitationskonstante G lässt sich, obwohl sie in der Astronomie eine grundlegende Rolle spielt, nicht aus den Planetenbewegungen bestimmen, sondern muss im Labor mit der Gravitationswaage (hier : nach Schürholz) gemessen werden (vgl. Abb. (M50-1)).

Zwei kleine Bleikugeln der Masse m_2 (ca 15 g) sind an den Enden einer Stange befestigt. Die Stange ist waagrecht an einem dünnen vertikalen Torsionsfaden aufgehängt. In der Mitte der Stange am Punkt S ist ein Spiegel befestigt, auf den das Licht der Lampe (leuchtender Glühfaden) fällt und von dort reflektiert als Lichtmarke an der Skala beobachtet wird. Auf einen um die Achsenrichtung des Fadens drehbaren Halter sind symmetrisch zu S zwei Bleikugeln der Masse m_1 (1,5 kg) aufgelegt. Man kann die großen Kugeln durch Umlegen in die Stellungen I bzw. II bringen.

2. **Messung mit der Beschleunigungsmethode**

In der Ruhelage I (Abb. (M50-1)) herrscht Gleichgewicht zwischen der Anziehungskraft von großer und kleiner Kugel und der Verdrillung des Torsionsfadens. Schwenkt man die äußeren großen Kugeln auf ihrem drehbaren Halter in Stellung II, wird dadurch das Gleichgewicht gestört; denn der Torsionsfaden ist wegen der großen Schwingungsdauer noch in der alten Richtung verdrillt, und die großen Kugeln ziehen die kleinen Kugeln nun in umgekehrter Richtung an. Deshalb ist die am Beginn der Bewegung zwischen je einem Kugelpaar wirkende Kraft F_0 doppelt so groß wie die wechselseitige Anziehung allein, da die zunächst noch vollständige Verdrillung des Fadens einer Kraft gleicher Größe und Richtung entspricht:

$$F_0 = 2 \cdot G\ m_1\ m_2\ r^{-2} \tag{M50-2}$$

Unter der Wirkung der Kraft F beginnen die beiden kleinen Kugeln beschleunigt auf die ihnen gegenüberliegenden großen Kugeln zuzufallen. Dabei wird der Torsionsfaden zuerst mehr und mehr entspannt und dann in entgegengesetzter Richtung verdrillt. Bis zu etwa 1/10 Schwingungsdauer ist mit etwa 5% Genauigkeit die Änderung der Fadenverdrillung zu vernachlässigen. Die Bewegung ist als gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung a zu betrachten. Für diesen Teil des Einschwingvorgangs gilt:

$$m_2\, a = 2 \cdot G\ m_1\ m_2\ r^{-2} \tag{M50-3}$$

$$\mathrm{a} = 2\ \mathrm{s}\,/\mathrm{t}^2 \qquad \text{(s: Weg der kleinen Kugel)} \tag{M50-4}$$

Aus den Gleichungen (M50-3) und (M50-4) folgt:

$$G = \frac{s}{t^2} \cdot \frac{r^2}{m_1} \tag{M50-5}$$

Die Beschleunigung a wird aus dem Weg S des Lichtzeigers auf der Skala aus der Ruhelage in der ersten Minute nach Umlegen der großen Kugel bestimmt. Wenn L der Abstand Spiegel (in der Waage)–Skala ist und d der Abstand der kleinen Kugeln vom Torsionsfaden, so gilt für den Weg s der kleinen Kugeln in der Waage:

$$\frac{s}{d} = \frac{S}{2\,L} \tag{M50-6}$$

(Winkelverdopplung bei der Reflexion des Lichtstrahls am Spiegel!).
Gleichung (M50-6) in Gleichung (M50-5) eingesetzt liefert:

$$G = \frac{r^2\ d}{2\,L\,m_1} \cdot \frac{S}{t^2} \tag{M50-7}$$

3. **Messung mit der Endausschlagmethode**

Durch Umlegen der großen Kugeln geht die Drehwaage aus der Ruhelage I nach einigen Schwingungen in die neue Ruhelage II über. Der Winkel zwischen diesen beiden Endlagen ist α. In der Ruhelage herrscht Momenten-Gleichgewicht. Infolge der Massenanziehung der beiden Kugelpaare wirkt auf das Messsystem das Moment $M = 2\,F\,d$ (F nach (M50-1), d: Achsenabstand der kleinen Kugel vom Torsionsband). Diesem ist entgegengesetzt gleich groß das Moment, verursacht durch die Verdrillung des Torsionsfadens um den Winkel $\alpha/2$;

$$M = D\,\alpha/2 \qquad \text{(D: Winkelrichtgröße des Torsionsfadens)}$$

$$2\;F\,d = D\;\frac{\alpha}{2} \qquad \text{oder} \qquad 2\;G\;\frac{m_1\,m_2}{r^2}\;d = D\;\frac{\alpha}{2} \tag{M50-8}$$

Für α gilt nach Gl. (M50-6)

$$\alpha \;=\; \frac{s}{d} \;=\; \frac{b}{2\,L} \tag{M50-9}$$

wobei b der Skalenabstand des Lichtzeigers zwischen den beiden Nullagen vor und nach Umlegen der großen Kugeln ist. Die Richtgröße D des Torsionsfadens wird mit genügender Genauigkeit aus der ungedämpften Schwingung des Waagensystems

$$J\;\frac{d^2\alpha}{d\,t^2} \;=\; -\,D\;\alpha$$

mit der bekannten Schwingungsdauer

$$T \;=\; 2\;\pi\;\sqrt{\frac{J}{D}}$$

bestimmt zu

$$D \;=\; \frac{4\,\pi^2\;J}{T^2} \tag{M50-10}$$

Das Trägheitsmoment J für die beiden kleinen Kugeln hat unter Vernachlässigung des Gehänges mit Spiegel den Wert

$$J \;=\; 2\;m_2\;d^2 \tag{M50-11}$$

Gleichungen (M50-9), (M50-10) und (M50-11) in Gleichung (M50-8) eingesetzt und nach G aufgelöst ergibt

$$G = \frac{\pi^2\;d\;r^2\;b}{L\;m_1\;T^2} \tag{M50-12}$$

Hinweis :

Die Gravitationswaage darf nicht berührt werden. Das Umlegen der Kugeln erfolgt ausschließlich durch den Assistenten.

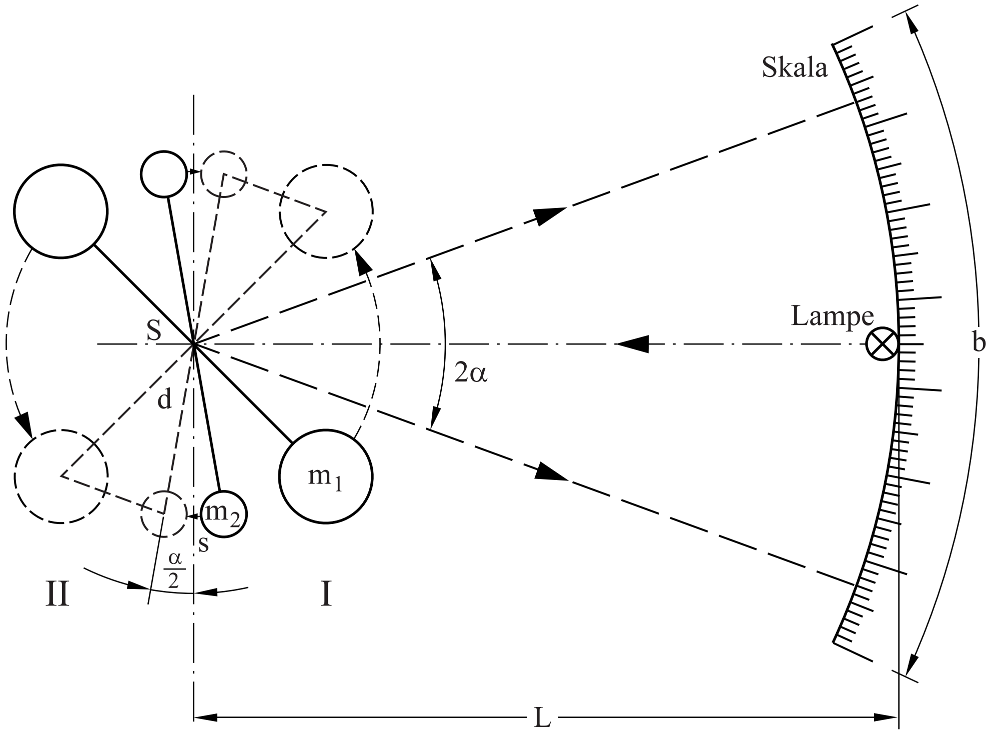

Abb. M50-1: m_1 und m_2: Massen der Bleikugeln; I und II: Gleichgewichtslagen. Die kleinen Kugeln m_2 sind an einem horizontalen Träger befestigt, der an einem Torsionsfaden aufgehängt ist.

Messprogramm

1. Die Gravitationskonstante ist nach der Beschleunigungsmethode Gl. (M50-7) zu bestimmen. Dazu ist zunächst der Nullpunkt des Lichtzeigers für die Ruhelage zu ermitteln und nach Umlegen der Kugeln der Weg des Lichtzeigers alle 10 bis 20 s zwei bis drei Minuten lang abzulesen. Für S/t^2 ist der aus der graphischen Darstellung gemittelte Wert zu verwenden.

2. Die Gravitationskonstante ist nach der Endausschlagmethode Gl. (M50-12) zu bestimmen. Die Schwingungsdauer T ist aus der graphischen Auftragung des Schwingungsverlaufs (mindestens 3 volle Schwingungen; Ablesung der Werte ca. alle 1/2 Min.) durch Mittelwertbildung zu entnehmen. Die neue Ruhelage lässt sich auch aus der graphischen Auftragung extrapolieren, wenn das System während der Versuchsdauer noch nicht wieder zur Ruhe gekommen ist.
   Daten : $m_1 = 1{,}500$ kg ; $r = 0{,}047$ m ; $d = 0{,}050$ m ;
   L (Abstand Spiegel-Skala) : bitte erst nach Beendigung der Messreihe ausmessen, da es dabei leicht zu Störungen in der Pendelbewegung kommen kann.

3. Die ermittelten G-Werte unterliegen folgendem systematischen Fehler : Die kleinere Kugel wird auch von der entfernteren großen Kugel angezogen (vgl. Abb. (M50-2)). Berechnen Sie den Korrekturfaktor β für die Kraft F zwischen m_1 und m_2 und korrigieren Sie damit die G-Werte in Aufgabe 1 und 2.

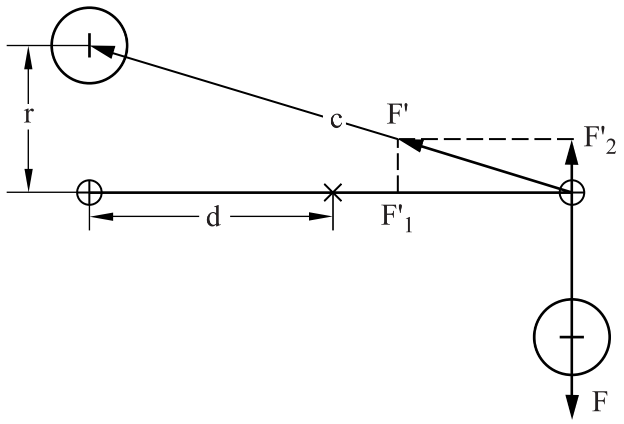

Abb. M50-2: Zur Berechnung des systematischen Fehlers.